

Programação Linear

Problema de programação Linear

Forma Geral de um Problema de Programação Linear (P.L.)

$$\min (\max) \quad z = \sum_{j \in J} c_j x_j$$

$$\text{s. a:} \quad \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in I_1 \quad (1)$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i \in I_2 \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I_3 \quad (3)$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in J_1 \quad (4)$$

$$x_j \leq 0, \quad j \in J_2 \quad (5)$$

$$x_j \leq 0, \quad j \in J_3 \quad (6)$$

onde

z é a função objectivo a ser optimizada

(1), (2), (3), (4), (5) e (6) são as restrições

(4), (5) e (6) são as restrições de sinal nas variáveis

x_j são as variáveis de decisão

c_j são os coeficientes de custo

a_{ij} são os coeficientes tecnológicos

Forma Standard de um P.L.

$$\min (\max) \quad z = \sum_{j \in J} c_j x_j$$

s. a:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} a_{ij} x_j &= b_i, & i \in I \\ x_j &\geq 0, & j \in J \end{aligned}$$

Formas Canónicas de um P.L.

$$\begin{array}{ll}\min & z = \sum_{j \in J} c_j x_j \\ \text{s. a:} & \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i \in I \\ & x_j \geq 0, \quad j \in J\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}\max & z = \sum_{j \in J} c_j x_j \\ \text{s. a:} & \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in I \\ & x_j \geq 0, \quad j \in J\end{array}$$

Operações de reformulação nas restrições

uma desigualdade pode ser transformada numa igualdade através da inclusão de uma **variável slack** ou **folga**

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sum_{j \in J} a_{ij} x_j - x_i^s = b_i \\ x_i^s \geq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sum_{j \in J} a_{ij} x_j + x_i^s = b_i \\ x_i^s \geq 0 \end{cases}$$

Operações de reformulação nas restrições

uma igualdade é sempre equivalente a duas desigualdades

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i \\ \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i \end{cases}$$

Operações de reformulação nas restrições de sinal

usualmente as restrições de sinal são restrições de não negatividade

$$x_j \leq 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_j = x'_j - x''_j \\ x'_j, x''_j \geq 0 \end{cases}$$

$$x_j \geq l_j \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x'_j = x_j - l_j \\ x'_j \geq 0 \end{cases}$$

$$x_j \leq u_j \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x'_j = u_j - x_j \\ x'_j \geq 0 \end{cases}$$

Operações de reformulação na função objectivo

$$\max z = -\min - z$$

Resolução gráfica

Na resolução gráfica identifique a solução ótima, a região admissível (limitada ou ilimitada), o semiespaço definido por cada restrição, os pontos extremos, ...

Exercício

Considere o seguinte Programa Linear (PL).

$$\max Z = x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. a } x_1 - 3x_2 \leq 3$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

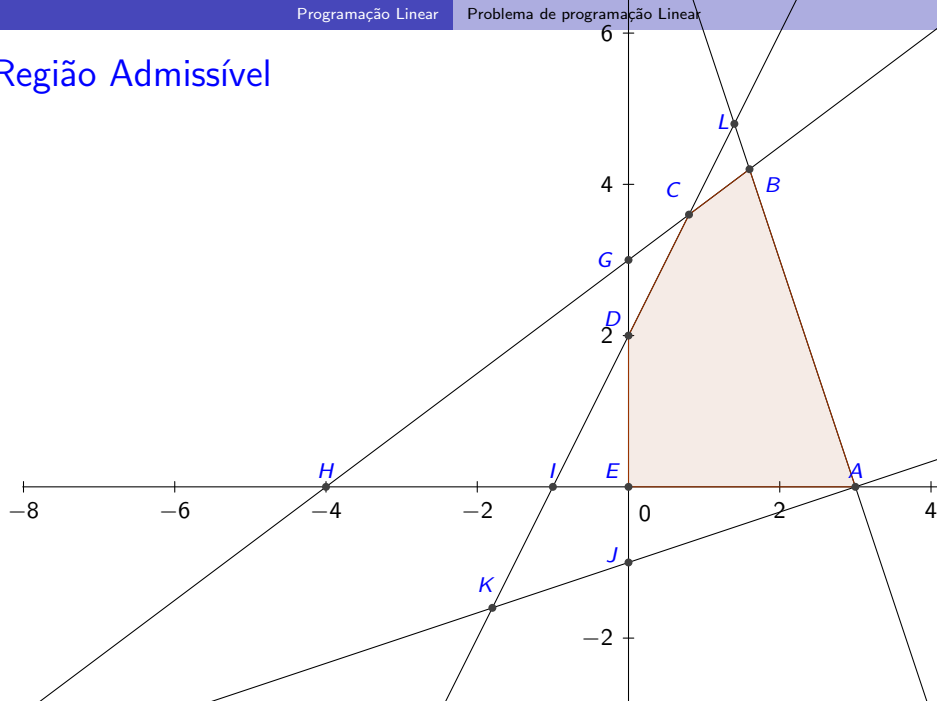
$$-3x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

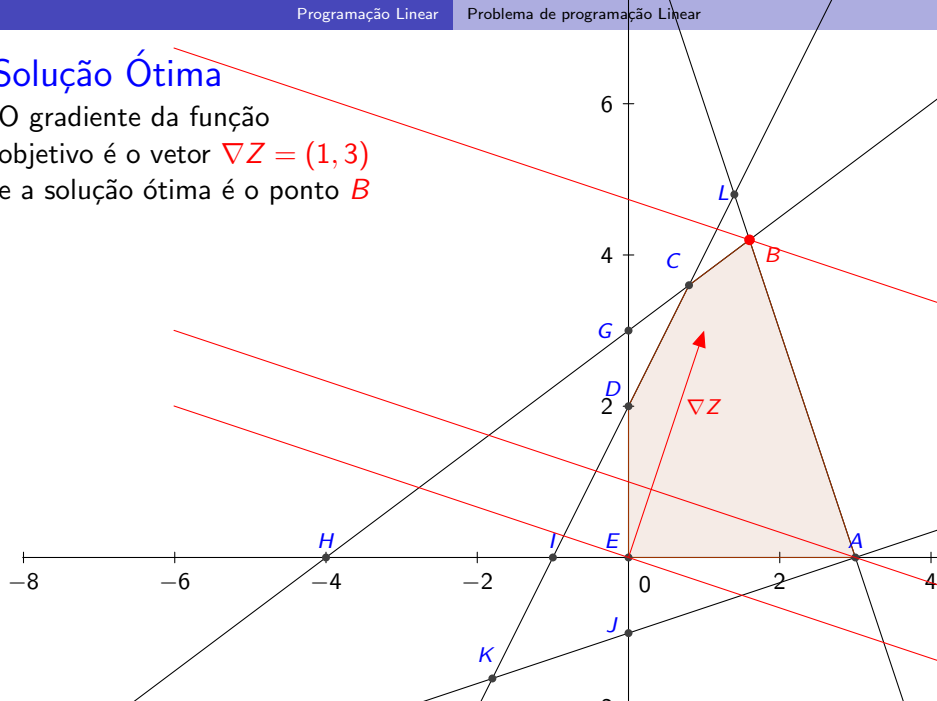
Esboce a região admissível no espaço das variáveis $\{x_1, x_2\}$ e identifique a solução ótima.

Região Admissível



Solução Ótima

O gradiente da função
objetivo é o vetor $\nabla Z = (1, 3)$
e a solução ótima é o ponto B



Análise convexa e caracterização de poliedros

Envolvente convexo

Definition

Um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é uma **combinação linear** dos vetores $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ se, para algum $\lambda \in \mathbb{R}^k$, temos

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$$

Se, adicionalmente, $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k$ e $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, então x é uma **combinação linear convexa** dos vetores x_1, \dots, x_k .

Notação

Para um subconjunto, não vazio, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $\text{conv}(S)$ denota o **envolvente convexo** dos elementos de S , isto é, o conjunto de todos os vetores que são combinação convexa finita de vetores de S .

Conjunto convexo

Definição

Um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é um **conjunto convexo** se $S = \text{conv}(S)$.

Definição alternativa

Um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é convexo se $\forall x_1, x_2 \in S$ e $\lambda \in [0, 1]$,
 $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S$.

Propriedades

- $\text{conv}(S)$ é o menor conjunto que contém S .
- $\text{conv}(S)$ é a interseção de todos os conjuntos convexos que contêm S .
- Se $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ são convexos, então $S_1 \cap S_2$ é convexo.

Definição

O envolvente convexo de um número finito de pontos é chamado de polítopo.

Exercício

Considere os pontos $a_1 = (1, 0)$, $a_2 = (2, 3)$, $a_3 = (-1, 4)$, $a_4 = (5, -3)$ e $a_5 = (-4, 3)$. Esboce o conjunto de todas as combinações convexas destes 5 pontos.

Um conjunto de pontos $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ diz-se independente afim se, a única solução de

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$$

é $\lambda_i = 0, j = 1, \dots, k$.

Proposição

$$x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$$

é independente afim sse

$$x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1 \in \mathbb{R}^n$$

é linearmente independente.

Definição

O envoltivo convexo de um número finito de pontos independentes afins $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ é chamado de **simplex** com vértices x_1, x_2, \dots, x_k .

Poliedro

Definition

Um poliedro $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é o conjunto de pontos que satisfaz um número finito de desigualdades lineares.

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$

Propriedades

- Um poliedro é um conjunto convexo
- Um poliedro limitado é um polítopo

Pontos extremos e raios extremos

Definições

- $x \in X$ é um **ponto extremo** de X se não existe $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$, tal que $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$.
- $r \in \mathbb{R}^n$ é um **raio** de X se e só se para qualquer ponto $x \in X$, o conjunto

$$\{y \in \mathbb{R}^n : y = x + \lambda r, \lambda \geq 0\} \subseteq X.$$

- Um raio r de X é um raio extremo de X se $r = \frac{1}{2}r^1 + \frac{1}{2}r^2$ onde r^1 e r^2 são raios de X , então $r^1 = \lambda_1 r$, $\lambda_1 \geq 0$ e $r^2 = \lambda_2 r$, $\lambda_2 \geq 0$.

Propriedade

Um poliedro tem um número finito de pontos extremos e raios extremos.

Exercícios

- ① Considere os conjuntos

$$X_1 = \{(x_1, x_2) : 2x_1 + x_2 \leq 8, x_1 + 2x_2 \leq 10, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

$$X_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 - 2x_2 \geq -6, x_1 - x_2 \geq -2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 1\}.$$

Indique os seus pontos extremos e, caso existam, as suas direções extremas.

- ② Determine todos os pontos extremos do poliedro

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, -x_1 + 2x_2 \leq 4, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}.$$

(Será que X possui alguma direção ? Porquê ?)

Teorema de Minkowski's

Se $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \neq \emptyset$ e $\text{rank}(A) = n$, então

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{k \in K} \lambda_k x^k + \sum_{j \in J} \mu_j r^j : \\ \sum_{k \in K} \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0, k \in K, \mu_j \geq 0, j \in J\}$$

onde $E = \{x^k, k \in K\}$ é o conjunto de pontos extremos e $R = \{r^j, j \in J\}$ é o conjunto de raios extremos.

Conjunto de soluções admissíveis

O conjunto X das soluções admissíveis de um LP é um poliedro.

Portanto:

- 1 X é convexo.
- 2 X tem um número finito de pontos extremos e raios extremos.
- 3 etc

Método gráfico de resolução de PL's

- 1 Determinação do conjunto de soluções admissíveis
- 2 Determinação da solução ótima, de entre todos os pontos admissíveis.

Possibilidades de um PL (Programa Linear)

- solução ótima única finita
- soluções ótimas alternativas finitas
- valor da solução ótima ilimitado
- região admissível vazia

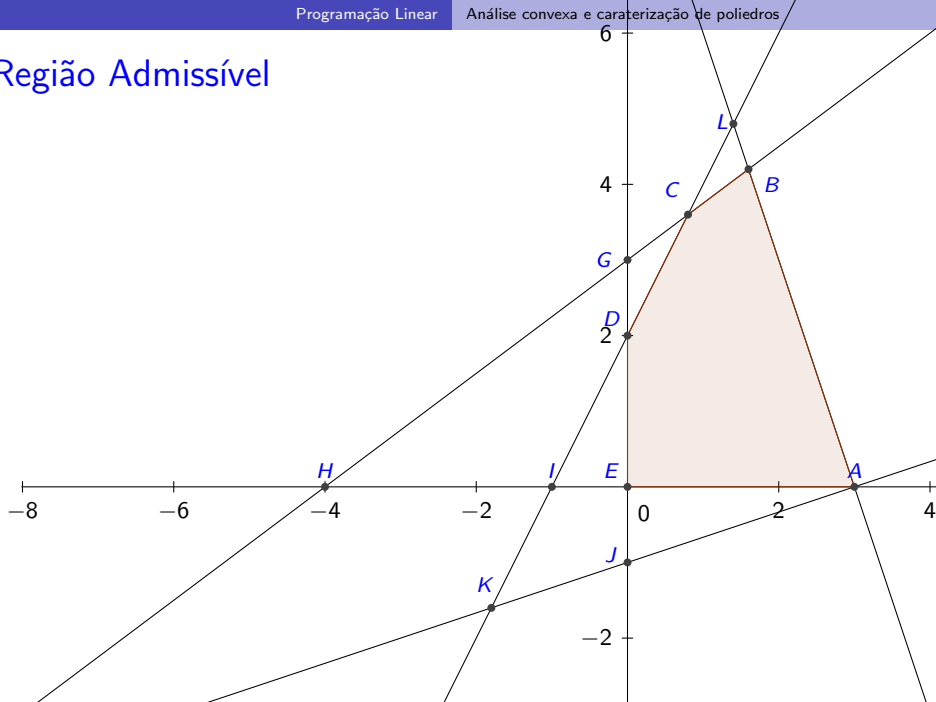
Exercício

Considere (novamente) o seguinte Programa Linear (PL).

$$\begin{array}{ll}\max & Z = x_1 + 3x_2 \\ \text{s. a} & x_1 - 3x_2 \leq 3 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

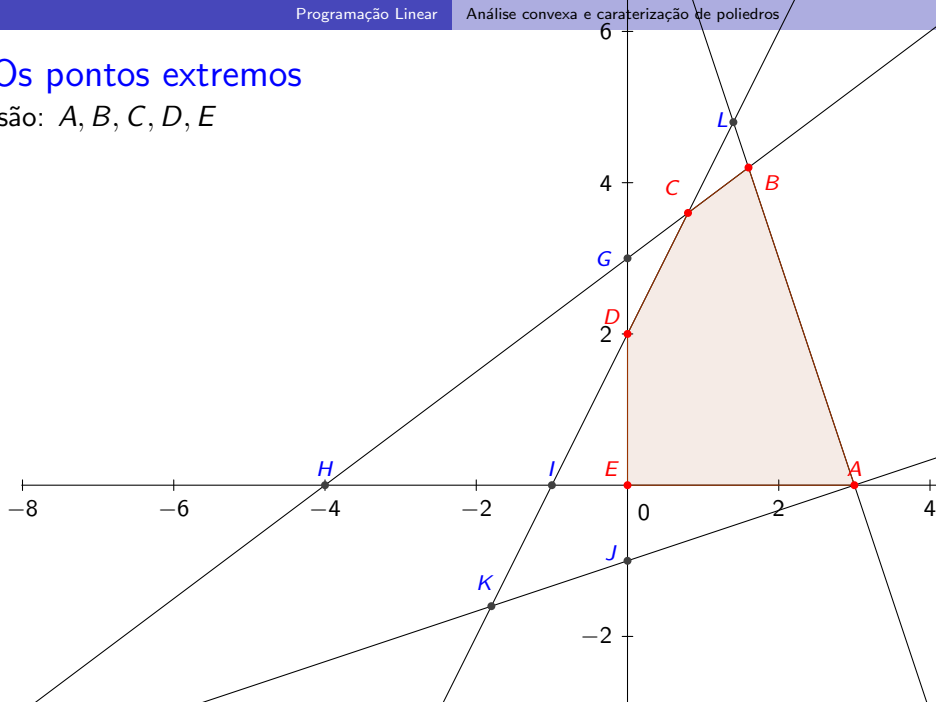
- (a) Esboce a região admissível no espaço das variáveis $\{x_1, x_2\}$ e identifique a solução ótima.
- (b) Identifique todos os pontos extremos e reformule o problema em termos da combinação convexa dos pontos extremos. Resolva o PL resultante.

Região Admissível



Os pontos extremos

são: A, B, C, D, E



A reformulação em termos da combinação linear convexa dos pontos extremos é

$$\begin{array}{ll} \max & Z = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D + \lambda_5 E \\ \text{s. a} & \sum_{i=1}^5 \lambda_i = 1 \\ & \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, 5 \end{array}$$

Método Simplex

Problema de P.L. na forma matricial

$$\min (\max) \quad z = c^t x$$

s. a:

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Exercício

Considere o seguinte Programa Linear (PL).

$$\begin{array}{ll}
 \max Z = 8x_1 + 5x_2 \\
 \text{s. a} & x_1 + x_2 \leq 8 \\
 & -3x_1 + x_2 \leq 0 \\
 & x_1 \geq 1 \\
 & x_2 \geq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

O problema na sua forma standard é

$$\begin{array}{llllllll}
 \max Z = 8x_1 + 5x_2 & & & & & & & \\
 \text{s. a} & x_1 + x_2 + x_3 & & & & & & = 8 \\
 & -3x_1 + x_2 + x_4 & & & & & & = 0 \\
 & -x_1 & & & +x_5 & & & = -1 \\
 & & -x_2 & & & +x_6 & & = -2 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq 0
 \end{array}$$

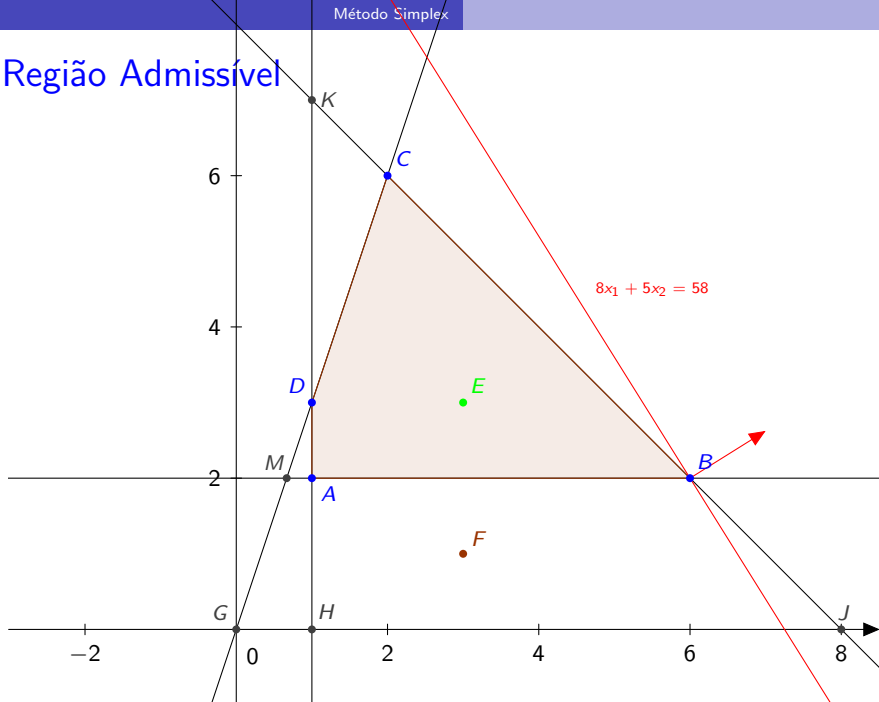
Em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

e $c^T = [8 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$

a matriz A é de dimensão 4×6

o sistema tem 4 equações e 6 variáveis, das quais 4 são variáveis slack

Região Admissível



Pontos e Soluções

ponto	solução	classificação
A(1,2)	(1,2,5,1,0,0)	SBA
B(6,2)	(6,2,0,16,5,0)	SBA
C(2,6)	(2,6,0,0,1,4)	SBA
D(1,3)	(1,3,4,0,0,1)	SBA
E(3,3)	(3,3,2,6,2,1)	SNBA
F(3,1)	(3,1,4,8,2,-1)	SNBNA
G(0,0)	(0,0,8,0,-1,-2)	SBNA degenerada
H(1,0)	(1,0,7,3,0,-2)	SBNA
J(8,0)	(8,0,0,24,7,-2)	SBNA
K(1,7)	(1,7,0,-4,0,5)	SBNA
M($\frac{2}{3}, 2$)	($\frac{2}{3}, 2, \frac{16}{3}, 0, -\frac{1}{3}, 0$)	SBNA

Nota:

SBA= solução básica admissível;

SNBA= solução não básica admissível;

SNBNA= solução não básica e não admissível;

SBNA= solução básica, não admissível.

Soluções Admissíveis Básicas

$$\begin{array}{ll} \max & z = c^t x \\ \text{s. a:} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A_{m \times n} \quad (n > m) \\ \text{car}(A, b) = \text{car}(A) = m \\ n \leftarrow \text{num. var.} \\ m \leftarrow \text{num. rest.} \end{array}$$

$$A = [B \quad N]$$

$$B_{m \times m} \leftarrow \text{matriz invert.}$$

$$\begin{array}{l} N_{m \times (n-m)} \\ x = [x_B \quad x_N]^t \end{array}$$

$$\begin{aligned} Ax = b &\Rightarrow [B \quad N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \\ &\Rightarrow Bx_B + Nx_N = b \\ &\Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \end{aligned}$$

Soluções Admissíveis Básicas

A solução $x = [x_B \ x_N]^t$ do sistema $Ax = b$ diz-se

solução básica se $\begin{cases} x_B = B^{-1}b \\ x_N = 0 \end{cases}$

solução básica admissível se também $x_B \geq 0$

B é a matriz básica (das colunas básicas)

N é a matriz não básica (das colunas não básicas)

as componentes de x_B são as **variáveis básicas**

as componentes de x_N são as variáveis não básicas

se pelo menos uma componente de x_B for igual a zero, então x é uma

solução básica admissível degenerada

Soluções Admissíveis Básicas

Exercício

Considere o seguinte conjunto de restrições

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 3, \\ -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2, \\ x_1 & - & 2x_2 & \leq & 0, \\ x_1, & x_2 & & \geq & 0 \end{array}$$

- (a) Desenhe a região admissível.
- (b) Identifique todos os pontos extremos e, para cada um, identifique todas as possíveis variáveis básicas e não básicas.
- (c) Suponha que é efetuado um movimento do ponto extremo $(2, 1)$ para o ponto extremo $(0, 0)$ no espaço das variáveis $\{x_1, x_2\}$. Especifique as possíveis variáveis de entrada e saída da base.

Pontos Extremos e Otimalidade

quando a solução ótima de um P.L. existe, então um ponto extremo ótimo também existe

recorde que: se x_1, x_2, \dots, x_k são os pontos extremos de X e se d_1, d_2, \dots, d_l são as direções extremas, então qualquer ponto x tal que $Ax = b$ e $x \geq 0$ pode ser representado por

$$x = \sum_{j=1, \dots, k} \lambda_j x_j + \sum_{j=1, \dots, l} \mu_j d_j$$

em que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, \dots, k} \lambda_j &= 1 \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, k \\ \mu_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, l \end{aligned}$$

Pontos Extremos e Otimalidade

Exercício

Considere o seguinte conjunto de restrições

$$x_1 - 3x_2 \leq 3$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-3x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(a) Desenhe a região admissível.

(b) Identifique todos os pontos extremos e, para cada um, identifique todas as possíveis variáveis básicas e não básicas.

Propriedades Fundamentais de um PL

- o conjunto X das soluções admissíveis de um problema de P.L. é convexo
- um ponto x é solução básica admissível de um problema de P.L. se e só se é um ponto extremo do conjunto X das soluções admissíveis do problema
- existe um número finito de soluções básicas admissíveis associadas a um problema de P.L., i.e. o conjunto X das soluções admissíveis dum problema de P.L. tem um número finito de pontos extremos

Propriedades Fundamentais de um PL

- o valor ótimo de problema de P.L. se existe e é finito, é atingido num ponto extremo do conjunto X das soluções admissíveis
- qualquer combinação linear convexa de soluções ótimas é ainda uma solução ótima
- se um problema de P.L. possuir mais do que uma solução ótima, então possui uma infinidade de soluções ótimas

Soluções Admissíveis Básicas e Pontos Extremos

um ponto é uma solução admissível básica se e só se for um ponto extremo

Motivação Geométrica do Algoritmo do Simplex

o algoritmo do simplex examina os pontos extremos até encontrar aquele que otimize o valor total da função objetivo ou então até determinar que a solução ótima ocorre ao longo de uma direção extrema

O Algoritmo do Simplex

na sua forma algébrica, para um problema de minimização:

Método Simplex

- 0 Escolha uma solução básica admissível inicial e seja B a base associada.
- 1 Resolva o sistema $Bx_B = b$ e seja
 $x_B = B^{-1}b = \bar{b}$ a sua única solução,
 $x_N = 0$,
 $z = c_B x_B$.
- 2 Resolva o sistema $y_B B = c_B$ e seja $y_B = c_B B^{-1}$ a sua única solução.
 Calcule $z_j - c_j = y_B A_j - c_j$ para todas as variáveis não básicas.
 Seja $z_k - c_k = \max_{j \in I_N} \{z_j - c_j\}$, sendo I_N o conjunto de índices das variáveis não básicas.

Método Simplex

2 (cont.)

Se $z_k - c_k < 0$, *STOP*, a solução básica admissível atual é uma solução ótima.

Se $z_k - c_k = 0$, a solução básica admissível atual é uma solução ótima, mas não é única. Continue no passo 3, considerando como variável de entrada na base a variável x_k , para encontrar a solução ótima alternativa.

Senão, continue no passo 3 considerando como variável de entrada na base a variável x_k .

Método Simplex

- ③ Resolva o sistema $B\bar{A}_k = A_k$ e seja $\bar{A}_k = B^{-1}A_k$ a sua única solução.

Se $\bar{A}_k \leq 0$, *STOP*, a solução ótima é ilimitada ao longo do raio

$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{bmatrix} + x_k \begin{bmatrix} -\bar{A}_k \\ e_k \end{bmatrix} : x_k \geq 0 \right\}$$

onde e_k é um vetor de dimensão $|I_N|$.

Caso contrário continue no passo 4.

Método Simplex

- 4 Seja x_k a variável de entrada na base.

O índice r da variável x_{B_r} que sai da base é determinado pelo seguinte quociente

$$\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}} = \min_{i \in I_B} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} : \bar{a}_{ik} > 0 \right\},$$

sendo I_B o conjunto de índices das variáveis básicas.

Atualize a base B em que a coluna A_k substitui a coluna A_{B_r} .

Atualize os conjuntos de índices I_B e I_N .

Volte ao passo 1.

O Método Simplex na sua forma de quadro

	x_N	x_B	
x_B	$B^{-1}N$	B^{-1}	$B^{-1}b$
$z_j - c_j$	$c_B B^{-1}A_j - c_j$		$c_B B^{-1}b$

O Método Simplex na sua forma de quadro

Exemplo

$$\max \quad z = -2x_1 + 4x_2 - 6x_3$$

s. a:

$$3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Método Simplex

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\bar{b}
x_4	3	-2	-4	1	0	0	4
x_5	2	1	1	0	1	0	10
x_6	1	(3)	-2	0	0	1	5
$z_j - c_j$	2	-4	6	0	0	0	0

Método Simplex

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\bar{b}
x_4	$11/3$	0	$-16/3$	1	0	$2/3$	$22/3$
x_5	$5/3$	0	$5/3$	0	1	$-1/3$	$25/3$
x_2	$1/3$	1	$-2/3$	0	0	$1/3$	$5/3$
$z_j - c_j$	$10/3$	0	$10/3$	0	0	$4/3$	$20/3$

Uma única solução ótima!

$$x^* = (0, 5/3, 0, 22/3, 25/3, 0), z^* = 20/3$$

O Método Simplex

Exemplo: soluções ótimas alternativas

$$\max \quad z = x_1 - 2x_2 + x_3$$

s. a:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 6$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Método Simplex

após algumas iterações obtemos o quadro ótimo

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\bar{b}
x_3	0	1	1	$2/3$	$-1/3$	0	6
x_1	1	1	0	$1/3$	$(1/3)$	0	6
x_6	0	4	0	$1/3$	$1/3$	1	15
$z_j - c_j$	0	4	0	1	0	0	12

$$x^{1*} = (6, 0, 6, 0, 0, 15), z^* = 12$$

contudo há indicação de existência de ótimo alternativo

Método Simplex

pivotando novamente

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	\bar{b}
x_3	1	2	1	1	0	0	12
x_5	3	3	0	1	1	0	18
x_6	-1	3	0	0	0	1	9
$z_j - c_j$	0	4	0	1	0	0	12

$$x^{2*} = (0, 0, 12, 0, 18, 9), z^* = 12$$

$$x^* = \alpha(6, 0, 6, 0, 0, 15) + (1 - \alpha)(0, 0, 12, 0, 18, 9), \alpha \in [0, 1], z^* = 12$$

O Método Simplex

Exemplo: soluções ótimas alternativas, ao longo de um raio extremo

$$\max \quad z = -4x_1 + 10x_2$$

s. a:

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$-2x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Método Simplex

após algumas iterações obtemos o quadro ótimo

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	\bar{b}
x_2	0	1	$-4/22$	$3/11$	$108/22$
x_1	1	0	$-5/11$	$2/11$	$25/11$
$z_j - c_j$	0	0	0	2	40

$$\bar{x}^* = (25/11, 108/22, 0, 0), z^* = 40$$

contudo há indicação de existência de ótimo alternativo, mas desta vez é ao longo da direção

$$d^* = (5/11, 4/22, 1, 0)$$

$$x^* = (25/11, 108/22, 0, 0) + \beta(5/11, 4/22, 1, 0), \beta \geq 0, z^* = 40$$

O Método Simplex

Exemplo: solução não limitada

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

s. a:

$$2x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Método Simplex

após algumas iterações obtemos o quadro

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{b}
x_1	1	0	0	-1	1	2
x_2	0	1	0	0	1	3
x_3	0	0	1	-2	4	4
$z_j - c_j$	0	0	0	-2	5	13

solução não limitada ao longo da direção

$$d^* = (1, 0, 2, 1, 0)$$

Determinação de uma sol. básica admissível inicial

$$\max \quad z = \sum_{j \in J} c_j x_j$$

$$\text{s. a:} \quad \begin{aligned} \sum_{j \in J} a_{ij} x_j &\leq b_i, & i \in I_1 \\ \sum_{j \in J} a_{ij} x_j &\geq b_i, & i \in I_2 \\ \sum_{j \in J} a_{ij} x_j &= b_i, & i \in I_3 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in J$$

Determinação de uma sol. básica admissível inicial

Problema auxiliar

$$\min \quad z^a = \sum_{i \in I_2} a_i + \sum_{i \in I_3} a_i$$

$$\begin{aligned} \text{s. a:} \quad & \sum_{j \in J} a_{ij} x_j + y_i = b_i, & i \in I_1 \\ & \sum_{j \in J} a_{ij} x_j - y_i + a_i = b_i, & i \in I_2 \\ & \sum_{j \in J} a_{ij} x_j + a_i = b_i, & i \in I_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_j &\geq 0, & j \in J \\ y_i &\geq 0, & i \in I_1 \cup I_2 \\ a_i &\geq 0, & i \in I_2 \cup I_3 \end{aligned}$$

Determinação de uma sol. básica admissível inicial

o problema auxiliar é sempre de minimização

Se $z^a > 0$ o problema original não tem soluções admissíveis

Se $z^a = 0$ a solução ótima do problema auxiliar é a sol. básica admissível inicial e dois casos podem acontecer:

- 1 todas as var. artificiais não estão na base: prosseguimos sem qualquer problema
- 2 algumas var. artificiais ainda estão na base:

Determinação de uma sol. básica admissível inicial

- 2 algumas var. artificiais ainda estão na base:
o primeiro passo a fazer é retirar essas var. da base

para o fazer, usar como pivot um elemento **não nulo** (pode ser negativo) de uma coluna não artificial (coluna da var. que vai entrar na base) e de uma linha de uma var. artificial (que sai da base)

se algum elemento na coluna da var. não artificial que vai entrar na base e de uma linha de uma var. artificial for zero, isso significa que a linha correspondente no problema original é redundante e, portanto, pode ser eliminada

Determinação de uma sol. básica admissível inicial

Exemplo

$$\min \quad z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

s. a:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 7$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 \geq 2$$

$$3x_1 + 2x_3 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Determinação de uma sol. básica admissível inicial

Problema auxiliar

$$\min \quad z^a = a_2 + a_3$$

s. a:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 - x_5 + a_2 = 2$$

$$3x_1 + 2x_3 + a_3 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_4, x_5, a_2, a_3 \geq 0$$

Determinação de uma sol. básica admissível inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_2	a_3	
x_4	1	1	1	1	0	0	0	7
a_2	-1	1	-1	0	-1	1	0	2
a_3	(3)	0	2	0	0	0	1	5
$z_j - c_j$	-1	2	-3	0	0	0	0	0
$z_j^a - c_j^a$	2	1	1	0	-1	0	0	7

Determinação de uma sol. básica admissível inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_2	a_3	
x_4	0	1	$1/3$	1	0	0	$-1/3$	$16/3$
a_2	0	1	$-1/3$	0	-1	1	$1/3$	$11/3$
x_1	1	0	$2/3$	0	0	0	$1/3$	$5/3$
$z_j - c_j$	0	2	$-7/3$	0	0	0	$1/3$	$5/3$
$z_j^a - c_j^a$	0	1	$-1/3$	0	-1	0	$-2/3$	$11/3$

Determinação de uma sol. básica admissível inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_2	a_3	
x_4	0	0	$2/3$	1	1	-1	$-2/3$	$5/3$
x_2	0	1	$-1/3$	0	-1	1	$1/3$	$11/3$
x_1	1	0	$2/3$	0	0	0	$1/3$	$5/3$
$z_j - c_j$	0	0	$-5/3$	0	2	-2	$-1/3$	$-17/3$
$z_j^a - c_j^a$	0	0	0	0	0	-1	-1	0

$z^a = 0$ e nenhuma variável artificial está na base

Determinação de uma sol. básica admissível inicial

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_2	a_3	
x_5	0	0	$2/3$	1	1			$5/3$
x_2	0	1	$1/3$	1	0			$16/3$
x_1	1	0	$2/3$	0	0			$5/3$
$z_j - c_j$	0	0	-3	-2	0			-9

Determinação de uma sol. básica admissível inicial

Exemplo

$$\min \quad z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

s. a:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$2x_2 + 3x_3 = 10$$

$$x_3 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Determinação de uma sol. básica admissível inicial

Problema auxiliar

$$\min \quad z^a = a_1 + a_2 + a_3$$

s. a:

$$x_1 + x_2 + x_3 + a_1 = 6$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 + a_2 = 4$$

$$2x_2 + 3x_3 + a_3 = 10$$

$$x_3 + x_4 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_4, a_1, a_2, a_3 \geq 0$$

Determinação de uma sol. básica admissível inicial

após algumas pivotações obtemos o quadro

	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	a_3	
x_2	0	1	0	$-3/2$	$1/2$	$1/2$	0	2
x_3	0	0	1	1	0	0	0	2
a_3	0	0	0	0	-1	-1	1	0
x_1	1	0	0	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	0	2
$z_j - c_j$	0	0	0	$-13/2$	$1/2$	$3/2$	0	-4
$z_j^a - c_j^a$	0	0	0	0	-2	-2	0	0

$z^a = 0$, contudo temos a variável artificial a_3 na base

notar o valor zero na linha da variável artificial, numa coluna não básica, significa que a terceira restrição é redundante

Determinação de uma sol. básica admissível inicial

continuar na fase 2, sem a terceira linha

	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	a_2	a_3	
x_2	0	1	0	$-3/2$	$1/2$	$1/2$	0	2
x_3	0	0	1	1	0	0	0	2
x_1	1	0	0	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	0	2
$z_j - c_j$	0	0	0	$-13/2$	$1/2$	$3/2$	0	-4

Determinação de uma sol. básica admissível inicial

Exemplo

$$\min \quad z = -3x_1 + 4x_2$$

s. a:

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Determinação de uma sol. básica admissível inicial

Problema auxiliar

$$\min \quad z^a = a$$

s. a:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_4 + a = 18$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$a \geq 0$$

Determinação de uma sol. básica admissível inicial

após algumas pivotações obtemos o quadro

	x_1	x_2	x_3	x_4	a	
x_2	1	1	1	0	0	4
a	-1	0	-3	-1	1	6
$z_j - c_j$	7	0	4	0	0	16
$z_j^a - c_j^a$	-1	0	-3	-1	0	6

quadro ótimo da fase 1

$z^a = 6 > 0$, o problema (original) não possui soluções admissíveis

Dualidade e Interpretação Económica

Construção do problema dual

max		min	
restrição i	\leq	≥ 0	variável i
	\geq	≤ 0	
	$=$	≤ 0	
variável j	≥ 0	\geq	restrição j
	≤ 0	\leq	
	\leq	$=$	
matriz A		matriz A^t	
coefic. f.o.		termos ind. rest.	
termos ind. rest.		coefic. f.o.	

Propriedades Fundamentais do dual

- o valor da f.o. para qualquer sol. admissível do problema de max. não é superior ao valor da f.o. correspondente a uma sol. admissível do problema de min.
- Se x e y são sol. admissíveis para um par de prob. duais, que dão igual valor às resp. f.o., então x e y são sol. ótimas para os resp. prob.
- para qualquer par de prob. duais, a existência de sol. ótima finita para um deles, garante a existência de sol. ótima finita para o outro, e os respetivos valores ótimos das f.o. coincidem

- um prob. de P.L. tem sol. ótima finita se e só se existirem sol. admissíveis para o primal e o dual
- se para algum dos prob. existir sol. não limitada, então o outro não possui soluções admissíveis

		Primal	
		$X_p \neq \emptyset$	$X_p = \emptyset$
Dual	$X_d \neq \emptyset$	sol. ót. fin.	dual s/ ót. fin.
	$X_d = \emptyset$	primal s/ ót. fin.	imp.

- Desvios Complementares

se uma var., de qualquer dos prob., for não nula na sol. ótima, então a restrição correspondente do outro prob. encontra-se saturada

se uma rest. de qualquer dos problemas não se encontra saturada na sol. ótima desse prob., então no outro prob. a var. associada a essa rest. é nula na sol. ótima

- se x e y são sol. admissíveis para os prob. primal e dual, resp., e verificam a propriedade dos desvios complementares, então x e y são sol. ótimas do primal e do dual

Desvios Complementares

$$\begin{array}{ll} \max & z = \sum_{j \in J} c_j x_j \\ \text{s. a:} & \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in I \\ & x_j \geq 0, \quad j \in J \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & w = \sum_{i \in I} y_i b_i \\ \text{s. a:} & \sum_{i \in I} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j \in J \\ & y_i \geq 0, \quad i \in I \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_j^* > 0 \Rightarrow \sum_{i \in I} a_{ij} y_i^* = c_j \\ y_i^* > 0 \Rightarrow \sum_{j \in J} a_{ij} x_j^* = b_i \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sum_{i \in I} a_{ij} y_i^* > c_j \Rightarrow x_j^* = 0 \\ \sum_{j \in J} a_{ij} x_j^* < b_i \Rightarrow y_i^* = 0 \end{array}$$

$$x_j^* \left(\sum_{i \in I} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \quad j \in J$$

$$y_i^* \left(\sum_{j \in J} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i \in I$$

Interpretação Económica

o modelo dual fornece informação económica acerca dos recursos limitados

o **custo reduzido** da variável $j \in J$ é $z_j - c_j = c_B B^{-1} A_j - c_j = y_B A_j - c_j$ é o **preço sombra** da restrição $x_j \geq 0$

o **preço sombra** ou **valor marginal** da restrição $i \in I$ é o valor da variável dual y_i associada a essa restrição e representa a variação que sofre o valor ótimo z^* do problema quando se adiciona ao termo independente uma unidade dessa restrição, mantendo tudo o resto; corresponde também ao *preço justo* que pagaríamos por adicionar ao termo independente dessa restrição mais uma unidade

Uma empresa produz fósforos compridos e curtos que dão, resp., um lucro de 3 e 2 unidades monetárias por cada caixa de fósforos.

A empresa possui uma máquina que produz ambos os tipos de fósforos. Esta máquina pode produzir no máximo 9 ($\times 1000$) caixas de fósforos compridos ou curtos.

Para a produção dos fósforos a empresa precisa de madeira e de caixas. A empresa tem disponível 18 ($\times 1000$) m^3 de madeira e para a produção de uma caixa de fósforos compridos são necessários 3 ($\times 1000$) m^3 de madeira e para a produção de uma caixa de fósforos curtos é necessário 1 ($\times 1000$) m^3 de madeira. A empresa tem disponível 7 ($\times 1000$) caixas para fósforos compridos e 6 ($\times 1000$) caixas para fósforos curtos.

Assume-se que toda a produção é vendida.

Como pode a empresa maximizar o seu lucro?

$$\max \quad z = 3x_1 + 2x_2$$

s. a:

$$x_1 + x_2 \leq 9$$

$$3x_1 + x_2 \leq 18$$

$$x_1 \leq 7$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min \quad w = 9y_1 + 18y_2 + 7y_3 + 6y_4$$

s. a:

$$y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$$

$$y_1 + y_2 + y_4 \geq 2$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

$$z^* = 22.5$$

$$x^* = (4.5, 4.5, 0, 0, 2.5, 1.5)$$

$$w^* = 22.5$$

$$y^* = (1.5, 0.5, 0, 0, 0, 0)$$

$$z^* = 22.5$$

o lucro total é de 22.5 unidades monetárias

$$x_1^* = 4.5$$

produção de 4.5 unidades do produto 1

$$x_2^* = 4.5$$

produção de 4.5 unidades do produto 2

$$x_3^* = 0$$

capacidade de operação da máquina foi esgotada

$$x_4^* = 0$$

o recurso madeira foi esgotado

$$x_5^* = 2.5$$

sobram 2.5 unidades de caixas fósforos compridos

$$x_6^* = 1.5$$

sobram 1.5 unidades de caixas fósforos curtos

$$w^* = 22.5$$

valorização interna da produção e dos recursos

$$y_1^* = 1.5$$

valorização interna da capacidade de operação da máq.

$$y_2^* = 0.5$$

valorização interna do recurso madeira

$$y_3^* = 0$$

valorização interna das caixas fósforos compridos

$$y_4^* = 0$$

valorização interna das caixas fósforos curtos

$$y_5^* = 0$$

perda de oportunidade de produção de fósforos compr.

$$y_6^* = 0$$

perda de oportunidade de produção de fósforos curtos

Uma empresa produz 3 produtos (P1, P2, P3). Para a sua produção considera uma restrição respeitante ao nível mínimo de produção (NP) e uma outra respeitante à matéria prima disponível (MP). Com o objetivo de maximizar o lucro total (em u.m.), a empresa determinou o plano ótimo de produção resolvendo o seguinte problema de P.L.

$$\begin{array}{ll} \max & z = x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ \text{s. a:} & 5x_1 + 10x_2 + 2x_3 \geq 10 \quad (NP) \\ & 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 16 \quad (MP) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

cujo quadro ótimo é

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	2	2	1	0	1/2	0	8
	-1	-6	0	1	1	-1	6
$z_j - c_j$	7	3	0	0	2	0	32

onde x_4 e x_5 são as variáveis de folga (*slacks*) associadas à 1ª e 2ª restrição, respetivamente.

A interpretação económica, válida apenas enquanto a base correspondente ao atual plano de produção se mantiver é a seguinte:

- $x_1 = 0$ e $y_3 = 7$ ($\Leftrightarrow 5y_1 + 4y_2 \geq 1$) : o produto P1 não é produzido porque a sua perda de oportunidade é não nula ($= 7$), significa que a valorização interna do nível mínimo de produção e da matéria prima necessária à produção de uma unidade de P1 é superior ao seu lucro unitário pelo que a produção de uma unidade de P1 provocaria um decréscimo de 7 u.m. no lucro.
- $x_2 = 0$ e $y_4 = 3$ ($\Leftrightarrow 10y_1 + 4y_2 \geq 5$) : o produto P2 não é produzido porque a sua perda de oportunidade é não nula ($= 3$), significa que a valorização interna do nível mínimo de produção e da matéria prima necessária à produção de uma unidade de P2 é superior ao seu lucro unitário pelo que a produção de uma unidade de P2 provocaria um decréscimo de 3 u.m. no lucro.
- $x_3 = 8$ e $y_5 = 0$ ($\Leftrightarrow 2y_1 + 2y_2 = 4$) : são produzidas 8 unidades do produto P3 pelo que a sua perda de oportunidade é nula.

- $x_4 = 6$ ($\Leftrightarrow 5x_1 + 10x_2 + 2x_3 \geq 10 \leftarrow \text{NP}$) e $y_1 = 0$: o nível mínimo de produção foi excedido em 6 unidades pelo que a sua valorização interna é nula.
- $x_5 = 0$ ($\Leftrightarrow 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 16 \leftarrow \text{MP}$) e $y_2 = 2$: a matéria prima disponível foi esgotada, trata-se de um recurso escasso porque a sua valorização interna é não nula; este recurso foi internamente valorizado em 2 unidades o que significa que por cada unidade adicional de matéria prima o lucro aumenta 2 u.m..

Método Dual do Simplex

Método Dual do Simplex

Primal

$$\max \quad z = cx = [c_B \ c_N][x_B \ x_N]^t$$

s. a:

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

solução ótima básica

$$x_B^* = B^{-1}b$$

$$z^* = c_B x_B$$

$$Ax + x' = b \Rightarrow$$

$$x' = b - Ax = b - Bx_B$$

Dual

$$\min \quad w = yb$$

s. a:

$$yA \geq c$$

$$y \geq 0$$

solução ótima básica

$$y_B^* = c_B B^{-1}$$

$$w^* = y_B b = c_B B^{-1} b = c_B x_B = z^*$$

$$yA - y' = c \Rightarrow$$

$$y' = yA - c = c_B B^{-1} A - c$$

$$y'_j = z_j - c_j, \quad j \in J$$

Método Dual do Simplex para um problema de minimização

- 0 Escolha uma solução dual admissível e básica inicial (i.e. tal que $z_j - c_j = c_B B^{-1} A_j - c_j \leq 0$ para todo j) e seja B a base associada.
- 1 Resolva o sistema $B\bar{b} = b$ e seja \bar{b} a sua única solução.
 Se $\bar{b} \geq 0$, *STOP*, a solução básica actual é uma solução óptima.
 Senão, seleccione a linha pivot r tal que $\bar{b}_r = \min_{i \in I} \{\bar{b}_i\} < 0$. A variável x_r vai sair da base.

- 2 Se $\bar{a}_{rj} \geq 0$, para todo j , *STOP*, a solução dual é ilimitada e o primal é inadmissível.

Caso contrário o índice k da coluna pivot é determinado pelo seguinte quociente

$$\frac{z_k - c_k}{\bar{a}_{rk}} = \min_{j \in J} \left\{ \frac{z_j - c_j}{\bar{a}_{rj}} : \bar{a}_{rj} < 0 \right\}.$$

A variável x_k vai entrar na base.

- 3 Actualize a base B em que a coluna A_k substitui a coluna A_{B_r} .
Actualize os conjuntos de índices I_B e I_N .
Volte ao passo 1.

Exemplo

$$\max \quad z = -10x_1 - 5x_2$$

s. a:

$$-20x_1 - 50x_2 \leq -200$$

$$-50x_1 - 10x_2 \leq -150$$

$$-30x_1 - 30x_2 \leq -210$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

solução básica inicial

$$x = (0, 0, -200, -150, -210) \quad \text{e} \quad y = (0, 0, 0, 10, 5)$$

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{b}
x_3	-20	-50	1	0	0	-200
x_4	-50	-10	0	1	0	-150
x_5	-30	-30	0	0	1	-210
$z_j - c_j$	10	5	0	0	0	0

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{b}
x_3	30	0	1	0	$-5/3$	150
x_4	-40	0	0	1	$-1/3$	-80
x_2	1	1	0	0	$-1/30$	7
$z_j - c_j$	5	0	0	0	$5/30$	-35

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{b}
x_3	0	0	1	$3/4$	$-23/12$	90
x_1	1	0	0	$-1/40$	$1/120$	2
x_2	0	1	0	$1/40$	$-1/24$	5
$z_j - c_j$	0	0	0	$1/8$	$1/8$	-45

solução ótima

$$x^* = (2, 5, 90, 0, 0) \quad \text{e} \quad y^* = (0, 1/8, 1/8, 0, 0)$$

$$z^* = w^* = -45$$

Pós-optimização e Análise de Sensibilidade

Pós-otimização

sem resolver o prob. desde o início, obter uma nova sol. ótima quando os dados iniciais do problema são alterados

Exemplo com respetivo quadro ótimo

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = 2x_1 + x_2 - x_3 \\
 \text{s. a:} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\
 & -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{b}
x_1	1	2	1	1	0	8
x_5	0	3	-1	1	1	12
$z_j - c_j$	0	3	3	2	0	16

I – Alteração no vector c dos custos

o custo de uma ou mais variáveis é modificado de c_k para \bar{c}_k

1. se x_k é uma variável não básica

o vector c_B dos custos das variáveis básicas não é alterado pelo que $z_j = c_B B^{-1} A_j$ não sofre qualquer modificação para qualquer variável;

deste modo $z_k - c_k \leq 0$ será substituído por

$$z_k - \bar{c}_k = z_k - c_k + (c_k - \bar{c}_k),$$

se $z_k - \bar{c}_k \leq 0$ a solução continua óptima,

se $z_k - \bar{c}_k > 0$ há que levar x_k para a base procedendo como é habitual no algoritmo do simplex.

2. se x_k é uma variável básica

agora o vector c_B dos custos das variáveis básicas é alterado pelo que $z_j = c_B B^{-1} A_j$ é modificado para todas as variáveis não básicas, também é necessário modificar o valor da função objectivo;

deste modo depois de modificar a última linha do quadro do simplex proceder com o algoritmo do simplex como é habitual caso a optimalidade tenha sido alterada.

exemplo

1. (a) $\bar{c}_2 = 5$ (b) $\bar{c}_2 = 2$ (c) $\bar{c}_2 = -2$
2. (a) $\bar{c}_1 = 1$ (b) $\bar{c}_1 = -2$

II – Alteração no vector b dos termos independentes

o vector dos termos independentes é modificado de b para \bar{b}

portanto teremos de calcular $B^{-1}\bar{b}$ bem como o novo valor da função objectivo;

deste modo como o quadro anterior era óptimo, após termos modificado a última coluna do quadro do simplex proceder com o algoritmo dual simplex caso a admissibilidade primal tenha sido violada.

exemplo

$$(a) \bar{b}^t = [10 \quad 1] \qquad (b) \bar{b}^t = [3 \quad -12]$$

III – Alteração na matriz A das restrições

a coluna na matriz das restrições de uma variável é modificada de A_k para \bar{A}_k

1. se x_k é uma variável não básica

a nova coluna $B^{-1}\bar{A}_k$ tem de ser calculada bem como o novo valor do custo reduzido $\bar{z}_k - c_k = c_B B^{-1}\bar{A}_k - c_k$,

se $\bar{z}_k - c_k \leq 0$ a solução continua ótima,

se $\bar{z}_k - c_k > 0$ há que levar x_k para a base procedendo como é habitual no algoritmo do simplex.

2. se x_k é uma variável básica

pode o novo conjunto de vectores 'básicos' deixar de formar uma base, mesmo que este não seja o caso, a alteração da coluna da matriz das restrições de uma variável básica origina uma alteração da base e, portanto, de B^{-1} provocando uma alteração de todo o quadro

exemplo

$$(a) \bar{A}_3^t = [1 \ 2] \qquad (b) \bar{A}_3^t = [-2 \ 3]$$

IV – Introdução de uma nova variável (actividade)

uma nova variável x_{n+1} com custo c_{n+1} e coluna na matriz das restrições A_{n+1} é considerada

sem resolver o problema poderemos determinar se será ou não vantajoso produzir (levar para a base) x_{n+1} , para isso calculemos

$$z_{n+1} - c_{n+1} = c_B B^{-1} A_{n+1} - c_{n+1}$$

se $z_{n+1} - c_{n+1} \leq 0$ a solução continua ótima e teremos $x_{n+1} = 0$ na solução ótima,

se $z_{n+1} - c_{n+1} > 0$ há que levar x_{n+1} para a base, calculemos $B^{-1} A_{n+1}$ e procedemos como é habitual no algoritmo do simplex.

V – Introdução de uma nova restrição

1. se a solução do quadro ótimo satisfaz a nova restrição,
a solução continua ótima para o novo problema.
2. se a solução do quadro ótimo não satisfaz a nova restrição,
a solução deixa de ser ótima para o novo problema,
seja B a base ótima antes da adição da nova restrição, a

nova base é $\bar{B} = \left[\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline A_B^{m+1} & \pm 1 \end{array} \right]$ e a respectiva inversa

$$\bar{B}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline \mp A_B^{m+1} B^{-1} & \pm 1 \end{array} \right]$$

2.1 seja $A^{m+1}x \leq b_{m+1}$ a nova restrição e seja x_{n+1} a correspondente variável *slack*, podemos reescrever a nova restrição da seguinte forma

$A_B^{m+1}x_B + A_N^{m+1}x_n + x_{n+1} = b_{m+1}$ e como a solução do quadro é $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ obtemos para a nova restrição

$(A_N^{m+1} - A_B^{m+1}B^{-1}N)x_n + x_{n+1} = b_{m+1} - A_B^{m+1}B^{-1}b$
adicionando esta nova linha ao quadro do simplex com variável básica x_{n+1} obtemos uma solução básica do novo problema, agora

se $b_{m+1} - A_B^{m+1}B^{-1}b \geq 0$ a solução é ótima.

se $b_{m+1} - A_B^{m+1}B^{-1}b < 0$ o algoritmo dual simplex é usado para restaurar a admissibilidade primal.

2.2 seja $A^{m+1}x \geq b_{m+1}$ a nova restrição e seja x_{n+1} a correspondente variável *slack*, podemos reescrever a nova restrição da seguinte forma

$A_B^{m+1}x_B + A_N^{m+1}x_n - x_{n+1} = b_{m+1}$ e como a solução do quadro é $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$ obtemos para a nova restrição

$$(A_B^{m+1}B^{-1}N - A_N^{m+1})x_n + x_{n+1} = A_B^{m+1}B^{-1}b - b_{m+1}$$

adicionando esta nova linha ao quadro do simplex com variável básica x_{n+1} obtemos uma solução básica do novo problema, agora

se $A_B^{m+1}B^{-1}b - b_{m+1} \geq 0$ a solução é ótima.

se $A_B^{m+1}B^{-1}b - b_{m+1} < 0$ o algoritmo dual simplex é usado para restaurar a admissibilidade primal.

- 2.3 seja $A^{m+1}x = b_{m+1}$ a nova restrição e seja x_{n+1}^a a correspondente variável artificial, podemos reescrever a nova restrição da seguinte forma
- $A_B^{m+1}x_B + A_N^{m+1}x_n \pm x_{n+1}^a = b_{m+1}$ (a variável artificial pode juntar-se com sinal + ou - consoante a rest. não seja verificada por excesso ou por defeito, resp.)

Exemplo

introdução de uma nova variável (actividade)

(a) $c_6 = 4$ e $A_6^t = [1 \ 2]$

(b) $c_6 = 2$ e $A_6^t = [2 \ 3]$

introdução de uma nova restrição

(a) $x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$

(b) $x_2 + x_3 = 10$

(c) $x_2 + x_3 \geq 2$

(d) $2x_1 - x_2 = 1$

introdução de uma nova restrição: $2x_1 - x_2 = 1$

a sol. óptima $x^* = (8, 0, 0, 0, 12)$ não satisfaz esta nova rest.

considerando a var. artificial x_a a nova rest. fica

$$2x_1 - x_2 + x_a = 1$$

pelo que haverá necessidade de usar o mét. das 2 fases

x_1 é uma variável básica para a qual temos na base actual

$$x_1 = 8 - 2x_2 - x_3 - x_4$$

deste modo a nova rest. fica $-5x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_a = -15$

o novo quadro, para resolução com o método das duas fases, fica

c'_j	0	0	0	0	0	1	
x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_a	\bar{b}
x_1	1	2	1	1	0	0	8
x_5	0	3	-1	1	1	0	12
x_a	0	-5	-2	-2	0	1	-15
$z'_j - c'_j$	0	-5	-2	-2	0	0	-15

usamos agora o mét. dual do simplex no mét. das duas fases

obtemos o seguinte quadro final da 1ª fase que é também óptimo do problema

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_a	\bar{b}
x_1	1	0	$1/5$	$1/5$	0	$2/5$	2
x_5	0	0	$11/5$	$-1/5$	1	$3/5$	3
x_2	0	1	$2/5$	$2/5$	0	$1/5$	3
$z'_j - c'_j$	0	0	0	0	0	-1	0
$z_j - c_j$	0	0	$9/5$	$4/5$	0	1	7

sol. óptima $x^* = (2, 3, 0, 0, 3)$ com $z^* = 7$

Análise de Sensibilidade

Obtenção de um intervalo de variação para os coeficientes do problema, tomados isoladamente, e sem alteração da base óptima.

- variação nos termos independentes das restrições
- variação nos coeficientes da f.o.